Euklides princip och oändliga mängders storlek

Kandidatuppsats i teoretisk filosofi.
Filosofiska institutionen, Stockholms universitet, vårtermin 2015.
Handledare: Dag Westerståhl.

Anders Lundstedt*
anders@anderslundstedt.se

*881015-0477

Jag diskuterar storleksmått som generaliserar antalsmåttet från ändliga till oändliga mängder. Förutom Cantors kardinalitetsmått introducerar jag de av Benci, Di Nasso och Forti utvecklade "talrikhetsmåtten", som är "euklidiska" storleksmått—de uppfyller egenskapen att delen är strikt mindre än helheten. Jag presenterar resultat som talar för att "euklidiska storlekar" är en bättre kandidat till "oändliga tal" än kardinaltal är.

Nyckelord: Galileos paradox, kardinaltal, oändlighet, talrikheter.

Innehåll

1. Inledning

Det är oproblematiskt att tala om en ändlig mängds storlek som antalet element i mängden. Det storleksmåttet uppfyller följande två villkor.

Definition 1 (Euklides princip).
Helheten är större än delen: om X är en äkta delmängd av Y är storleken av X mindre än storleken av Y.

Definition 2 (Humes princip).
Två mängder är lika stora om och endast om det finns en bijektion mellan dem.

Galileos paradox är att ett storleksmått på oändliga mängder inte samtidigt kan uppfylla Euklides princip och Humes princip. Till exempel: enligt Euklides princip är mängden naturliga tal mindre än mängden kvadrater men enligt Humes princip är mängderna lika stora då $n \mapsto n^2$ är en bijektion mellan mängderna.[1]

Filosofi om oändligheter har plågats av paradoxen sen långt innan Galileos exempel. Galileo själv och flera med honom drog slutsatsen att oändligheter inte kan ordnas: relationerna "mindre än", "lika stor som" och "större än" är inte tillämpbara på oändliga mängder. Bolzano konstruerade en sekvens oändliga mängder av naturliga tal och argumenterade för att varje mängd i sekvensen var oändligt mycket större än den föregående (Bolzano, 1851). På så sätt avfärdade han Humes princip till fördel för Euklides princip, men utan att presentera någon generell metod för att avgöra storleksrelationer. Kort därefter gick Georg Cantor i motsatt riktning när han gav upp Euklides princip och visade hur Humes princip kan användas för att konstruera en rigorös teori om oändliga storlekar (först i Cantor, 1874; se också Cantor, 1911).[2]

Vi kan formulera det avgörande problemet mer exakt som problemet att generalisera ändlig storlek på ett icketrivalt sätt—på ett sätt så att vi kan särskilja oändliga storlekar. Efter Cantors lösning fick frågan om existens av andra icketriviala generaliseringar inte mycket uppmärksamhet, tills att Benci och Di Nasso (2003) presenterade teorin om talrikheter. Talrikhetsmått (det finns fler än ett) är inte bara mått som skiljer sig från Cantors kardinalitetsmått—de uppfyller dessutom Euklides princip.

I den här uppsatsen avser jag att diskutera storleksmått, med tyngdpunkt på storleksmått som uppfyller Euklides princip. Mina bidrag är en skiss på en generalisering av Euklides princip (Avsnitt 4), en motivering av nödvändiga krav på ett storleksmått

[1] Förutsatt urval (till exempel i ZFC) kan vi visa en generell variant av Galileos paradox: en mängd är oändlig om och endast om den är i bijektion med en äkta delmängd.

[2] För en detaljerad historik, se Mancosu (2009).

(Avsnitt 7) och en diskussion av vilket eller vilka storleksmått som är de “rätta” måtten (Avsnitt 9). I Avsnitt 8 ger jag en kort introduktion till talrikhetsmått.

Om bakgrundsteori och grundvalsfrågor. Bakgrundsteori och mängdteoretiska antaganden har förstås betydelse för en storleksrelations egenskaper och för huruvida en storleksrelation ens kan definieras. I sammanhang där jag anser att sådant är oväsentliga teknikaliteter kan det hända att jag tar mig mängdteoretiska friheter som kanske inte är tillgängliga i till exempel ZFC. Jag arbetar i sådana fall under antagandet att mitt resonemang går att formulera i någon motsägelsefri och “okontroversiell” teori. (Det här innebär inte att jag ignorerar grundvalsfrågor. Jag kommer ta hänsyn till sådana när jag bedömer det som relevant.)

Mina implikationer är högerassociativa. En implikation $A \implies B \implies C$ ska läsas $A \implies (B \implies C)$.

Om översättning. Benci och Di Nasso (2003) introducerade “numerosities” och “numerosity measures”, vilka jag valt att översätta som talrikheter respektive talrikhetsmått.

2. Två olika sätt att tala om storlek

Vi kan tala om mängders storlek på två sätt. Det första sättet är med relationerna “X är mindre än Y” och “X och Y är lika stora”. Det andra sättet är att tilldela X och Y “storlekar” $s(X)$ respektive $s(Y)$ från en ordnad klass. Det första sättet kan tyckas mer grundläggande. För från två mängder X och Y kan vi använda principer som Humes princip eller Euklides princip för att avgöra storleksrelationerna, utan att behöva gå omvägen via “storlekarna” $s(X)$ och $s(Y)$. Denna intuition är särskilt stark för oändliga mängder eftersom det saknas uppenbara kandidater till vad $s(X)$ respektive $s(Y)$ skulle vara. Ett storleksmått s ger förstås upphov till relationer “X är mindre än Y” och “X och Y är lika stora” men under naturliga antaganden gäller även det omvända förhållandet, vilket vi kan se som följer.

Vi kan förenkla “X är mindre än Y” och “X och Y är lika stora” till en relation “X är mindre än eller lika stor som Y”, som vi förkortar $X \leq Y$. Under antagandet att denna relation är (åtminstone) en partiell ordning återfår vi “X och Y är lika stora” som “$X \leq Y$ och $Y \leq X$”. Vi återfår “X är mindre än Y” som “$X \leq Y$ och $Y \not\leq X$”. Låt $\overline{X}$ vara ett val ur ekvivalensklassen av mängder lika stora som X. Det följer då att $X \leq Y$ om och endast om $\overline{X} \leq \overline{Y}$. Således kan vi definiera ett storleksmått $s(X) = \overline{X}$, där storleksrelationen är “$\leq$” begränsad till mängderna $\overline{X}$.

Vi kan alltså med gott samvete begränsa oss till att studera storleksmått $s\colon V \to \mathcal{N}$ där V är ett "universum" av mängder och $\mathcal{N}$ är en klass av "storlekar" på vilken det finns en partiell ordning "mindre än eller lika stor som".

3. De vedertagna storleksmåtten

Ändlig mängdstorlek som "antal element" kan förstås definieras på olika sätt. Jag hoppas att följande definitioner är oproblematiska.

Definition 3 (Ändlig mängd).
En mängd X är *ändlig* om och endast om det finns ett n och en bijektion från X till mängden $\overline{n} \coloneqq \{0, \ldots, n-1\}$ av naturliga tal mindre än n.

Definition 4 (Ändlig storlek).
Det *ändliga storleksmåttet* är en funktion $X \mapsto \#X$ från ändliga mängder till naturliga tal; $\#X$ är det n så att X är i bijektion med $\overline{n}$.

Definition 5 (Cantors kardinalitetsmått).
Två mängder X och Y har *samma kardinalitet* om och endast om det finns en bijektion $X \to Y$. X har *mindre eller lika stor kardinalitet* som Y om och endast om det finns en injektion $X \to Y$.

Definition 5 definierar en storleksrelation men inget storleksmått. Ett storleksmått får vi med metoden från Avsnitt 2.[3] Vi använder notationen $|X|$ för måttet och kallar värdena $|X|$ *kardinaltal*. Vi betecknar kardinaltal med κ, λ och μ.

Det är trivialt att Cantors kardinalitetsmått generaliserar det ändliga storleksmåttet, i den mening att Definition 4 och Definition 5 ger samma storleksrelation på ändliga mängder. Låt $\mathcal{P}(X)$ beteckna potensmängden av X, det vill säga mängden av alla delmängder av X. Att Cantors kardinalitetsmått är en icketrivial generalisering—det vill säga kan särskilja oändliga storlekar—är en omedelbar konsekvens av följande resultat.

Sats 6 (Cantors sats).

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|.$$

Bevis. Vi måste visa $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ och $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$.

Enhetsmängdkonstruktionen $x \mapsto \{x\}$ är en injektion $X \to \mathcal{P}(X)$, så $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$.

---

[3] Den som oroas av att metoden inte kan formaliseras i till exempel ZFC kan hitta en alternativ lösning i kapitel 6 i Jech (2003).

För att visa $|X| \neq \mathcal{P}(X)|$ antar vi $|X| = |\mathcal{P}(X)|$, det vill säga att det finns en bijektion $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$. Betrakta mängden $Y = \{x : X \,:\, x \notin f(x)\}$. Eftersom f är en bijektion finns $y \in X$ så att $f(y) = Y$. Per definition av Y har vi $y \in Y$ om och endast om $y \notin f(y)$, det vill säga vi har motsägelsen att $y \in Y$ om och endast om $y \notin Y$. □

4. En generalisering av Euklides princip

Medan Humes princip ger oss nödvändiga och tillräckliga villkor på en storleksrelation så ger Euklides princip oss endast ett nödvändigt villkor. Euklides princip kan därför inte definiera storlek. I detta avsnitt skissar jag en generalisering som ger både nödvändiga och tillräckliga villkor på en storleksrelation. Min generalisering kommer vara en "skiss" i den mening att den kommer bero av en endast intuitivt karaktäriserad klass av funktioner. Därför kan den ej utan ytterligare precisering användas för att rigoröst definiera storlek. Jag har två syften med denna skiss. Dels ser jag en generalisering av Euklides princip som ett intressant problem, om så bara för att klargöra intuitioner. Dels kan jag använda generaliseringen istället för att direkt hänvisa till intuition när jag i Avsnitt 7 diskuterar nödvändiga villkor på ett storleksmått.

Enligt Euklides princip är mängden $2\mathbb{N}$ av jämna naturliga tal mindre än mängden $\mathbb{N}$ av hela naturliga tal. Betrakta mängderna som består av enhetsmängderna konstruerade från $\mathbb{N}$ respektive $2\mathbb{N}$, det vill säga mängderna

$$\mathbb{N}^1 := \{\{n\} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

respektive

$$(2\mathbb{N})^1 := \{\{n\} \,:\, n \in 2\mathbb{N}\}.$$

Vi har $(2\mathbb{N})^1 \subset \mathbb{N}^1$ så $(2\mathbb{N})^1$ är mindre än $\mathbb{N}^1$ enligt Euklides princip.[4] Men hur förhåller sig $s(\mathbb{N}^1)$ och $s((2\mathbb{N})^1)$ till $s(\mathbb{N})$ och $s(2\mathbb{N})$? Eftersom $\mathbb{N}^1$ och $(2\mathbb{N})^1$ intuitivt inte är annat än $\mathbb{N}$ respektive $2\mathbb{N}$ "i förklädnad" så borde vi ha $s(\mathbb{N}^1) = s(\mathbb{N})$ respektive $s((2\mathbb{N})^1) = S(2\mathbb{N})$. Men Euklides princip ger oss inte dessa likheter, så ordagrant tolkad ger den oss inte $s(\mathbb{N}^1) < s(2\mathbb{N})$, ej heller $s(\mathbb{N}) < s((2\mathbb{N})^1)$. Faktum är att till exempel $s(\mathbb{N}^1) > s(2\mathbb{N})$ är *kompatibelt* med Euklides princip.

I ett försök att utvidga Euklides princip observerar vi att $\mathbb{N}^1$ och $(2\mathbb{N})^1$ är *definierade* som bilden av $\mathbb{N}$ respektive $2\mathbb{N}$ under en viss funktion—i det här fallet funktionen $x \mapsto \{x\}$.

[4] Notationen $X \subset Y$ använder jag förstås när X är en äkta delmängd av Y; när så inte nödvändigtvis är fallet använder jag notationen $X \subseteq Y$.

Men om vi från det vill sluta oss till $s((2\mathbb{N})^1) = s(2\mathbb{N})$ stöter vi på Galileos paradox för $(2\mathbb{N})^1$ kan lika gärna definieras som bilden av $\mathbb{N}$ under $x \mapsto \{2x\}$. För att undvika Galileos paradox är mitt förslag att endast ta hänsyn till definitioner som är enklast möjliga i en viss mening. I det här fallet vill vi att $(2\mathbb{N})^1$ som bilden av $2\mathbb{N}$ under $x \mapsto \{x\}$ kvalificerar som "enklast möjliga definition", medan $(2\mathbb{N})^1$ som bilden av $\mathbb{N}$ under $x \mapsto \{2x\}$ inte gör det.

Det tycks mig som att $(2\mathbb{N})^1$ relaterar till $2\mathbb{N}$ på ett sätt som $(2\mathbb{N})^1$ inte relaterar till vare sig $\mathbb{N}^1$ eller $\mathbb{N}$. Jag tror att denna intuition kan preciseras som följer. Om vi söker en injektion $2\mathbb{N} \to (2\mathbb{N})^1$ finns det ett *uppenbart* val, nämligen $x \mapsto \{x\}$. Söker vi en injektion åt andra hållet är inversen $\{x\} \mapsto x$ det uppenbara valet. Söker vi en injektion $\mathbb{N}^1 \to (2\mathbb{N})^1$ är det uppenbara valet $\{x\} \mapsto \{2x\}$, men söker vi en injektion $(2\mathbb{N})^1 \to \mathbb{N}^1$ är det uppenbara valet *inte* dess invers $\{2x\} \mapsto \{x\}$, utan inklusionen $\{x\} \mapsto \{x\}$. På samma sätt är de uppenbara injektionerna mellan $\mathbb{N}$ och $\mathbb{N}^1$ inbördes inversa, men de uppenbara injektionerna mellan till exempel $\mathbb{N}$ och $(2\mathbb{N})^1$ är inte det.

Förutom att $\{x\} \mapsto \{x\}$ är ett mer uppenbart val av injektion än $\{2x\} \mapsto \{x\}$ är den förstnämnda "enklare" i viss mening—vilket kan tyckas trivialt för vilken injektion är enklare än inklusionen av en delmängd? Ett annat exempel är injektionerna $\{x\} \mapsto x$ och $\{2x\} \mapsto x$ från $(2\mathbb{N})^1$ till $\mathbb{N}$. Här är den förstnämnda enklare än den sistnämnda i en icketrivial mening. För om vi tar $\{x\} \mapsto x$ (dekonstruktion av enhetsmängd) och $2x \mapsto x$ (halvering av jämnt tal) som "atomära operationer" så krävs det en atomär operation mer för att definiera $\{2x\} \mapsto x$ än det krävs för att definiera $\{x\} \mapsto x$. (Det här argumentet förutsätter att "atomär operation" kan definieras icke godtyckligt.)

Jag väljer att kalla den klass av injektioner jag här försöker beskriva för *enklast möjliga injektioner*. Intuitionen är att den enklaste möjliga injektionen mellan två mängder ska vara det uppenbara valet av injektion—alternativt karaktäriserad som den injektion som är enklast att definiera. Jag har ingen exakt definition att ge, eller ens goda anledningar att tro att en sådan är möjlig. Jag kommer därför begränsa tillämpning av begreppet till fall där intuitionen är tydlig att vi faktiskt har att göra med "enklast möjliga injektion" och (som påpekat i avsnittets inledning) där jag annars ändå skulle hänvisat till intuition.

Jag kan ge ett generellt påstående om enklast möjliga funktioner och det är att inklusion av en delmängd med säkerhet kvalificerar som enklast möjliga injektion (det följer att identiteten på en mängd är enklast möjliga injektion). Jag tror också att klassen är sluten under komposition, men utan närmare analys är det inget jag kommer våga tillämpa. Med hjälp av enklast möjliga injektioner följer här mitt försök att generalisera Euklides princip.

Definition 7 (Enkelhetsprincipen).

Två mängder X och Y är lika stora om och endast om det finns en bijektion $f\colon X \to Y$ så att både f och dess invers f^{-1} är enklast möjliga injektioner. X är mindre än Y om X är lika stor som någon $Y' \subset Y$.

Definition 7 definierar en storleksrelation som är reflexiv och symmetrisk. Transitivitet följer från men implicerar inte att klassen enklast möjliga injektioner är sluten under komposition.

Sats 8 (Enkelhetsprincipen implicerar Euklides princip).

Om X är en äkta delmängd av Y så är X mindre än Y, enligt Definition 7.

Bevis. Det enda jag hitintills sagt med säkerhet om enklast möjliga injektioner räcker för att härleda Euklides princip från Definition 7. För att visa att X är mindre än Y (enligt Definition 7) måste vi visa att X är lika stor som någon $Y' \subset Y$ (enligt Definition 7). Men X är lika stor som $X \subset Y$ (enligt Definition 7) eftersom identiteten på X är enklast möjliga injektion $X \to X$. □

5. Svagare principer

Det finns naturliga sätt att försvaga Euklides princip och Humes princip, så att de är kompatibla med varandra.

Definition 9 (Euklides svagare princip).

Helheten är minst lika stor som delen: om X är en delmängd av Y så är X mindre än eller lika stor som Y.

Definition 10 (Humes svagare princip).

Om två mängder är lika stora så finns en bijektion mellan mängderna.

Det finns också ett naturligt sätt att försvaga enkelhetsprincipen.

Definition 11 (Svagare enkelhetsprincipen).

Två mängder X och Y är lika stora om det finns en bijektion $f\colon X \to Y$ så att både f och dess invers f^{-1} är enklast möjliga injektioner.

I en intuitiv mening utgör dessa tre principer minimikrav på ett storleksmått. Enklast att övertyga sig om det är kanske att betrakta hur märkligt det ter sig om någon av dem inte är uppfylld: om det finns en del som är större än helheten; eller om det finns lika stora mängder som inte kan sättas i bijektion; eller om det finns inversa enklast möjliga injektioner mellan två olika stora mängder.

Värt att notera är hur Humes svagare princip och svagare enkelhetsprincipen kompletterar varandra, genom att behålla olika riktningar från ekvivalensen i respektive starkare princip. Humes svagare princip går i riktningen från lika storlek till existens av bijektion. Svagare enkelhetsprincipen går i riktningen från existens av (en speciellt sorts) bijektion till lika storlek.

6. Lite matematik

Jag repeterar lite teori om kommutativa ordnade ringar och kommutativa ordnade semiringar. De hela talen med addition och multiplikation är prototypen av en kommutativ ordnad ring, liksom de naturliga talen med addition och multiplikation är prototypen av en kommutativ ordnad semiring. I nästa avsnitt kommer jag motivera att mängders storlekar alltid måste utgöra en kommutativ ordnad semiring och att dessa kan inbäddas i en kommutativ ordnad ring om och endast om motsvarande storleksmått uppfyller Euklides princip.

Definition 12 (Kommutativ ordnad semiring).

En *kommutativ ordnad semiring* är en struktur $\langle S, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ bestående av en mängd S, binära operationer *addition* $x, y \mapsto x + y$ och *multiplikation* $x, y \mapsto x \cdot y$ på S, konstanter $0, 1 \in S$ och en linjär ordning $\leq$, så att

$$\begin{aligned}
&\text{(addition associativ)} && (x + y) + z = x + (y + z),\\
&\text{(multiplikation associativ)} && (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),\\
&\text{(addition kommutativ)} && x + y = y + x,\\
&\text{(multiplikation kommutativ)} && x \cdot y = y \cdot x,\\
&\text{(distributivitet)} && x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\\
&\text{(additiv identitet)} && x + 0 = x,\\
&\text{(annihilation)} && x \cdot 0 = 0,\\
&\text{(multiplikativ identitet)} && x \cdot 1 = x,\\
&\text{(addition monoton)} && x \leq y \implies x + z \leq y + z,\\
&\text{(multiplikation monoton)} && 0 \leq x, y \implies x \leq y \implies x \cdot z \leq y \cdot z.
\end{aligned}$$

Definition 13 (Kommutativ ordnad ring).

En *kommutativ ordnad ring* är en kommutativ ordnad semiring med additiva inverser, det vill säga så att

$$\forall x \exists y,\ x + y = 0.$$

Det är lätt att visa att additiva inverser är unika, så med $-x$ betecknar vi det y så att $x + y = 0$.

Den kommutativa ordnade semiringen av naturliga tal kan utökas till en kommutativ ordnad ring genom att vi lägger till additiva inverser—de negativa talen. Man kan undra under vilka omständigheter det är möjligt att utöka en kommutativ ordnad semiring till en kommutativ ordnad ring.

Definition 14 (Inbäddning av kommutativa ordnade semiringar).

En *inbäddning* av en kommutativ ordnad semiring $\langle S, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ i en kommutativ ordnad ring $\langle R, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ är en injektion $\varphi\colon S \to R$ så att

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \\ \varphi(1) &= 1, \\ \varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \cdot \varphi(y), \\ x \leq y &\iff \varphi(x) \leq \varphi(y). \end{aligned}$$

Om $\varphi\colon S \to R$ är en inbäddning av en kommutativ ordnad semiring i en kommutativ ordnad ring så utgör

$$\{\pm\varphi(s) \ :\ s \in S\}$$

en kommutativ ordnad ring—den minsta sådana delstrukturen av R som innehåller $\varphi(S)$. Varje inbäddning ger upphov till isomorfa sådana kommutativa ordnade ringar, varför vi kan tala om existens av inbäddning som den unika möjligheten att utöka en kommutativ ordnad semiring till en kommutativ ordnad ring.

Konstruktionen som ger följande resultat är välkänd, men jag har inte hittat någon referens för just det här fallet. För fullständighet har jag därför inkluderat ett bevis som bilaga.

Sats 15 (Existens av inbäddning).

En kommutativ ordnad semiring kan inbäddas i någon kommutativ ordnad ring om och endast om

$$x + y = x + y' \implies y = y'.$$

Bevis. Se Bilaga A. □

7. Vad är ett storleksmått?

Kan ändlig mängdstorlek generaliseras godtyckligt eller finns det naturliga gränser som vi måste hålla oss inom för att fortfarande vilja kalla det ett storleksmått?

Ändliga mängders storlekar är de naturliga talen. Man kan tänka sig en matematisk position enligt vilken de naturliga talen har en privilegierad, grundläggande position. Man kan utvidga denna position till att det bland matematiska objekt även finns en privilegierad klass av "oändliga tal" som för oändliga objekt fyller den storleksfunktion naturliga tal fyller för ändliga objekt. Då kan inte en generalisering av det ändliga storleksmåttet göras godtyckligt, i den mening att det i så fall finns exakt en "korrekt" generalisering—den som ger oss de "oändliga talen".

Jag finner en sådan position något absurd. Både naturliga tal och ändliga mängders storlek är, om än sällsynt användbara, endast definierade begrepp, varken mer eller mindre, och samma gäller för oändliga mängders storlek. Men mer lärda personer än jag har försvarat (Gödel, 1947) en sådan "platonism" eller betraktat den som en möjlighet (Dutilh Novaes, 2014), så det är ingen position jag kommer ignorera.

Oavsett filosofisk position är inte alla generaliseringar av ändlig storlek lika värdefulla. En trivial generalisering där alla oändliga mängder har samma storlek är förstås inte lika tillämpbar som icketriviala generaliseringar. Önskvärt är att bevara så många som möjligt av det ändliga storleksmåttets egenskaper. Så vilka villkor kan vi ställa på ett storleksmått om vi inte vill ta ställning mellan Euklides princip och Humes princip? Jag kommer nu försöka motivera att vissa villkor är intuitivt nödvändiga.

Definition 16 (Mängduniversum).

Ett mängduniversum är en klass mängder V som är sluten under delmängder, union och kartesisk produkt, det vill säga

(1) $X \in V \implies Y \subset X \implies Y \in V$,

(2) $X, Y \in V \implies X \cup Y \in V$,

(3) $X, Y \in V \implies X \times Y \in V$.

Den uppmärksamme läsaren noterar kanske att jag inte kräver att ett mängduniversum är slutet under potensmängder. Teorin för de storleksmått jag vill fokusera på är intressant ändå och dessutom mer välutvecklad för delmängder, unioner och kartesiska produkter. (Jämför med kardinalitetsmåttet som vi utan potensmängder inte kan säga särskilt mycket intressant om, på grund av kontinuumhypotesens oberoende.)

Definitioner liknande följande finns i litteraturen kring talrikheter, se till exempel Benci och Di Nasso (2003) eller Benci, Nasso och Forti (2007).

Definition 17 (Storleksmått).

Ett *storleksmått* på ett mängduniversum V är en surjektion s från V till en kommutativ ordnad semiring $\langle s(V), +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$, av vilken de naturliga talen $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ är en delstruktur, så att

$$
\begin{aligned}
&(\text{ÄM}) && s(X) = \#X \text{ för ändliga mängder } X,\\
&(\text{ESP}) && X \subseteq Y \implies s(X) \leq s(Y),\\
&(\text{HSP}) && s(X) = s(Y) \implies |X| = |Y|,\\
&(\text{SUM}) && X \cap Y = \emptyset \implies s(X \cup Y) = s(X) + s(Y),\\
&(\text{PROD}) && s(X \times Y) = s(X) \cdot s(Y),\\
&(\text{KONT}) && s(X) \leq S(Y) \implies \exists Y' \subseteq Y,\, s(X) = s(Y').
\end{aligned}
$$

Det kommer vara praktiskt att uttryckligen ange vad det i Definition 17 innebär att $\langle s(V), +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ är en kommutativ ordnad semiring:

$$
\begin{aligned}
&(\text{konstanter}) && 0, 1 \in s(V),\\
&(\text{slutenhet under addition}) && (s(X) + s(Y)) \in s(V),\\
&(\text{slutenhet under multiplikation}) && (s(X) \cdot s(Y)) \in s(V),\\
&(\text{addition associativ}) && (s(X) + s(Y)) + s(Z) = s(X) + (s(Y) + s(Z)),\\
&(\text{multiplikation associativ}) && (s(X) \cdot s(Y)) \cdot s(Z) = s(X) \cdot (s(Y) \cdot s(Z)),\\
&(\text{addition kommutativ}) && s(X) + s(Y) = s(Y) + s(X),\\
&(\text{multiplikation kommutativ}) && s(X) \cdot s(Y) = s(Y) \cdot s(X),\\
&(\text{distributivitet}) && s(X) \cdot (s(Y) + s(Z)) = s(X) \cdot s(Y) + s(X) \cdot s(Z),\\
&(\text{additiv identitet}) && s(X) + 0 = s(X),\\
&(\text{annihilation}) && s(X) \cdot 0 = 0,\\
&(\text{multiplikativ identitet}) && s(X) \cdot 1 = s(X),
\end{aligned}
$$

(reflexivitet)	$s(X) \leq s(X)$,
(antisymmetri)	$s(X) \leq s(Y) \implies s(Y) \leq s(X) \implies s(X) = s(Y)$,
(transitivitet)	$s(X) \leq s(Y) \implies s(Y) \leq s(Z) \implies s(X) \leq s(Z)$,
(linjäritet)	$s(X) \leq s(Y) \vee s(Y) \leq s(X)$,
(minsta element)	$0 \leq s(X)$,
(addition monoton)	$s(X) \leq s(Y) \implies s(X) + s(Z) \leq s(Y) + s(Z)$,
(multiplikation monoton)	$s(X) \leq s(Y) \implies s(X) \cdot s(Z) \leq s(Y) \cdot s(Z)$.

Följande resultat kommer vara användbart.

Sats 18 (Ett klassiskt trick).

Låt s vara ett storleksmått. För varje familj $\{X_i\}$ av mängder finns en familj $\{Y_i\}$ av parvis disjunkta mängder så att $s(Y_i) = s(X_i)$.

Bevis. Ta $Y_i := (i, X_i)$. och använd multiplikativ identitet. □

Definition 17 innehåller en del redundanta villkor, men det vore i min mening opedagogiskt att utelämna dessa. Men när jag nu vill motivera definitionen behöver jag förstås inte motivera de villkor som kan visas redundanta. (Jag påstår inte att följande resultat identifierar all redundans.)

Sats 19 (Redundanta villkor).

Följande villkor i Definition 17 kan härledas från övriga: konstanter, slutenhet under addition och multiplikation, additiv identitet, annihilation, minsta element, att addition är monoton och att multiplikation är monoton.

Bevis. Att de naturliga talen är en delstruktur ger oss konstanter $0, 1 \in s(V)$.

Från (SUM) och (PROD) får vi att $s(V)$ är slutet under addition respektive multiplikation.

Från (ÄM) och (SUM) får vi additiv identitet genom $s(X) + 0 = s(X \cup \emptyset) = s(X)$. På liknande sätt får vi (annihilation) från (ÄM) och (PROD).

Från (ÄM) och (ESP) får vi att 0 är minsta element.

Med hjälp av (ESP), (PROD) och (KONT) visar vi att multiplikation är monoton. Anta $s(X) \leq s(Y)$. Vi har då $s(X) = s(Y')$ för något $Y' \subseteq Y$ För varje Z har vi då

$$s(X) \cdot s(Z) = s(Y') \cdot s(Z) = s(Y' \times Z) \leq s(Y \times Z) = s(Y) \cdot s(Z),$$

där olikheten följer av $Y' \times Z \subseteq Y \times Z$ och (ESP).

För att på liknande sätt visa att addition är monoton använder vi Sats 18. Anta $s(X) \leq s(Y)$. Från (KONT) har vi då $s(X) = s(Y')$ för något $Y' \subseteq Y$ och vill visa $s(Y') + s(Z) \leq s(Y) + s(Z)$. Tack vare Sats 18 kan vi anta $Y \cap Z = \emptyset$. Från (SUM) och (ESP) följer då

$$s(Y') + s(Z) = s(Y' \cup Z) \leq s(Y \cup Z) = s(Y) + s(Z). \qquad \square$$

Med redundanta villkor eliminerade återstår det att motivera att de naturliga talen är en delstruktur, (ÄM), (ESP), (HSP), (SUM), (PROD), (KONT), associativitet och kommutativitet för addition och multiplikation, distributivitet, multiplikativ identitet, reflexivitet, antisymmetri, transitivitet och linjäritet. Jag vädjar nu till intuition.

Vi vill att storleksfunktionen generaliserar det ändliga storleksmåttet. Av detta följer (ÄM) och att de naturliga talen är en delstruktur.

(ESP) och (HSP) är Euklides svagare princip respektive Humes svagare princip, som motiverades i Avsnitt 5.

Vi vill att storleksrelationen är en linjär ordning. Av detta följer kraven på reflexivitet, antisymmetri, transitivitet och linjäritet.[5]

För att motivera (PROD) observerar vi att en produkts storlek rimligtvis enbart beror på de ingående faktorernas storlekar:

$$s(X) = s(X') \implies s(Y) = s(Y') \implies s(X \times Y) = s(X' \times Y').$$

Detta är ekvivalent med att det på $s(V)$ finns en operation som respekterar produkter. Låter vi denna operation vara multiplikation så får vi (PROD). (Observera att vi endast kan göra detta eftersom vi ännu inte motiverat villkoren på multiplikation.) Med liknande skäl motiverar vi (SUM).

Principen (KONT) uttrycker en sorts kontinuitetprincip för storlekar: att en mängd X innehåller delmängder av alla storlekar mindre än $s(X)$. Eftersom varje mängd är uppdelbar i "atomer"—dess enhetsmängder—ter sig detta rimligt.

Det återstår att motivera distributivitet; att addition och multiplikation är associativa och kommutativa; och att 1 är multiplikativ identitet. För att göra det kan vi tillämpa vår intuition systematiskt genom att tillämpa svagare enkelhetsprincipen (Definition 11), som motiverades i Avsnitt 5.

Eftersom $S(X) \cdot 1 = S(X \times \{*\})$ motiverar vi 1 som multiplikativ identitet genom att hitta en bijektion $f\colon X \to X \times \{*\}$ så att både f och f^{-1} är enklast möjliga injektioner—

[5] Reflexivitet är i sammanhanget ytterligare ett redundant villkor men jag tror att det för de flesta läsare skulle skapa förvirring om det utelämnades. Jag vet att jag skulle bli förvirrad.

rimligtvis kvalificerar $x \mapsto (x, *)$. På liknande sätt använder vi motiverar vi distributivitet och att addition och multiplikation är associativa och kommutativa. Till exempel motiverar vi multiplikativ kommutativitet med att $(x, y) \mapsto (y, x)$ och dess invers rimligtvis är enklast möjliga injektioner mellan $X \times Y$ och $Y \times X$. Jag lämnar resten till läsaren, i den mån icketrivialiteter återstår.

Sats 20 (Ändlig storlek ett storleksmått).
Det ändliga storleksmåttet är ett storleksmått.

Bevis. Trivialt. □

Sats 21 (Kardinalitet ett storleksmått).
Cantors kardinalitetsmått är ett storleksmått.

Bevis. De flesta villkoren i Definition 17 kan enkelt visas. Andra är betydligt svårare. (Till exempel: i Zermelo–Fraenkels mängdteori är total ordning av kardinaliteter ekvivalent med urval.) Se till exempel Jech (2003). □

Som en konsekvens av Humes princip har oändliga kardinaltal en trivial aritmetisk struktur.

Sats 22 (Kardinaltalsaritmetik).

$$\kappa \geq |\mathbb{N}| \implies \kappa + \mu = \max(\kappa, \mu),$$
$$\kappa \geq |\mathbb{N}| \implies \mu \neq 0 \implies \kappa \cdot \mu = \max(\kappa, \mu).$$

Bevis. Se till exempel Jech (2003). □

Precis som Cantors kardinalitetsmått är ett storleksmått som uppfyller Humes princip (det enda sådana storleksmåttet), kan man tänka sig att det finns storleksmått som uppfyller Euklides princip.

Definition 23 (Euklidiskt storleksmått).
Ett *euklidiskt storleksmått* är ett storleksmått som uppfyller Euklides princip, det vill säga ett storleksmått s så att

$$\text{(EP)} \qquad X \subset Y \implies s(X) < s(Y).$$

Jag har inte sett följande resultatet vare sig uttryckt eller bevisat, men håller det inte för omöjligt att det eller något liknande redan finns att hitta.

Sats 24 (Existens av additiva inverser).

Låt s vara ett storleksmått på ett mängduniversum V. Storlekarna $s(V)$ kan inbäddas i en ring om och endast om s är euklidiskt.

Bevis. Resultatet följer av Sats 15 om vi visar att s är euklidiskt om och endast om

$$s(X) + s(Y) = s(X) + s(Y') \implies s(Y) = s(Y').$$

(*om*) Anta $X \subset Y$ och

$$s(X) + s(Y) = s(X) + s(Y') \implies s(Y) = s(Y').$$

Vi vill visa $s(X) < s(Y)$. (ESP) ger $s(X) \leq s(Y)$ så det räcker om vi visar $s(X) \neq s(Y)$. Anta $s(X) = s(Y)$. Vi har då

$$s(X) + 0 = s(X) = s(Y) = s(X \cup (Y \setminus X)) = s(X) + s(Y \setminus X)$$

så hypotes ger $s(Y \setminus X) = 0$ från vilket (HSP) och (ÄM) ger motsägelsen $Y \setminus X = \emptyset$.

(*endast om*) Anta (EP) och

$$s(X) + s(Y) = s(X) + s(Y').$$

Vi kan vi anta att X, Y och Y' är parvis disjunkta (Sats 18). Vi antar $s(Y) \neq s(Y')$ och härleder en motsägelse. Eftersom storlekar är linjärt ordnade kan vi anta $s(Y) < s(Y')$. Från (KONT) har vi då ett $Z \subseteq Y'$ så att $s(Y) = s(Z)$. Eftersom $Z = Y'$ skulle implicera $s(Y) = s(Y')$ måste vi ha $Z \subset Y'$. Vi har då $X \cup Z \subset X \cup Y'$ så följande omskrivning motsäger (EP):

$$s(X \cup Z) = s(X) + s(Z) = s(X) + s(Y) = s(X) + s(Y') = s(X \cup Y'). \qquad \square$$

8. Talrikheter

Finns euklidiska storleksmått? Ja, åtminstone under vissa mängdteoretiska antaganden. Följande konstruktion är från Benci och Di Nasso (2003).

Definition 25 (Uppräkneliga märkta mängder).

En *märkt mängd* är en uppräknelig mängd X tillsammans med en *märkfunktion* $\ell_X : X \to \mathbb{N}$ sådan att för varje $n \in \mathbb{N}$, $\ell_X(x) = n$ för ändligt antal $x \in X$. Mängderna

$$X_n := \{x : \ell_X(x) \leq n\}$$

är de *ändliga approximationerna* av den märkta mängden (X, ℓ_X).

Idén bakom märkta mängder är att formalisera vardagsmetoden att räkna en ändlig mängd genom att partitionera mängden och räkna varje partition separat, för att sedan summera. De ändliga approximationerna motsvarar då delsummorna från summeringsprocessen. För ett utförligt exempel, se Mancosu (2009).

Definition 26 (Märkta mängders delmängder, union och kartesiska produkt).

En märkt mängd (X, ℓ_X) är en delmängd av en märkt mängd (Y, ℓ_Y) om $X \subseteq Y$ och $\ell_X(x) \leq \ell_Y(x)$ för alla $x \in X$. Unionen av två märkta mängder (X, ℓ_X) och (Y, ℓ_Y) är den märkta mängden $(X \cup Y, \ell_{X \cup Y})$ med märkfunktionen

$$\ell_{X\cup Y}(x) := \begin{cases} \max(\ell_X(x), \ell_Y(x)) & \text{om } x \in X \cap Y, \\ \ell_X(x) & \text{om } x \in X \setminus Y, \\ \ell_Y(x) & \text{om } x \in Y \setminus X. \end{cases}$$

Den kartesiska produkten av två märkta mängder (X, ℓ_X) och (Y, ℓ_Y) är den märkta mängden $(X \times Y, \ell_{X\times Y})$ med märkfunktionen $\ell_{X\times Y}(x, y) := \max(\ell(x), \ell(y))$.

Definitionen av union generaliserar definitionen av disjunkt union i Benci och Di Nasso (2003). Med Definition 26 har vi att uppräkneliga märkta mängder utgör ett mängduniversum $\mathcal{L}$, om än ett något märkligt sådant. (Ett sätt att göra det lite mer naturligt är att begränsa sig till det minsta universum som innehåller den märkta mängden $(\mathbb{N}, \ell_{\mathbb{N}})$, där $\ell_{\mathbb{N}}(n) := n$.)

Definition 27 (Talrikhetsmått på märkta mängder).

Ett *talrikhetsmått* är en surjektion t från $\mathcal{L}$ till en linjärt ordnad mängd $\langle t(\mathcal{L}), \leq \rangle$, sådan att

(1) $t(X) \leq t(Y)$ om $\#X_n \leq \#Y_n$ för alla n,

(2) $x < t(X)$ om och endast om $x = t(Y)$ för något $Y \subset X$,

(3) $t(X \times Y) = t(X' \times Y')$ om $t(X) = t(X')$ och $t(Y) = t(Y')$,

(4) $t(X \cup Y) = t(X' \cup Y')$ om $X \cap Y = X' \cap Y' = \emptyset$, $t(X) = t(X')$ och $t(Y) = t(Y')$.

Sats 28 (Talrikhetsmått är euklidiska storleksmått).

Varje talrikhetsmått på uppräkneliga märkta mängder är ett euklidiskt storleksmått.

Bevis. Med lite arbete följer resultatet från resultaten i Benci och Di Nasso (2003). □

Ett selektivt ultrafilter är en mängdteoretisk konstruktion. Detaljerna i följande definition är inte avgörande för förståelse av resultaten som följer. Ett antal ekvivalenta formuleringar finns i Benci och Di Nasso (2003).

Definition 29 (Selektivt ultrafilter över de naturliga talen).

En familj U av mängder av naturliga tal är ett *selektivt ultrafilter över de naturliga talen* om och endast om

(1) $X \in U \implies X \subseteq Y \subseteq \mathbb{N} \implies Y \in U$,

(2) $X \in U \implies Y \in U \implies X \cap Y \in U$,

(3) $X \in U$ eller $\mathbb{N} \setminus X \in U$ för alla X,

(4) $X \notin U$ för ändliga mängder X,

(5) För alla funktioner $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ finns det en mängd $X \in U$ så att f begränsad till X är växande.

Det är oberoende av ZFC huruvida det existerar ett selektivt ultrafilter över de naturliga talen.

Sats 30 (Existens av talrikhetsmått).

Relativt ZFC finns ett talrikhetsmått om och endast om det finns ett selektivt ultrafilter över de naturliga talen.

Bevis. Se Benci och Di Nasso (2003). □

Så med Sats 30 har vi faktiskt ett euklidiskt storleksmått, om än under vissa mängdteoretiska antaganden och på ett något märkligt mängduniversum som är begränsat till högst uppräkneliga mängder. Talrikhetsmått på mer naturliga mängduniversum med mer än uppräkneliga mängder finns i Benci, Nasso och Forti (2007). Teorin är tyvärr inte lika lättillgänglig. Lättare att presentera är resultatet från Di Nasso och Forti (2010).

En *punktmängd* av dimension n är en delmängd av $\mathbb{R}^n$, det vill säga en mängd n-tuplar av reella tal. Klassen punktmängder av alla dimensioner är nästan ett mängduniversum. En delmängd av en punktmängd är en punktmängd. Om X och Y är punktmängder av dimension n respektive m är den kartesiska produkten $X \times Y$ en punktmängd av dimension $n + m$. Unionen av punktmängder X och Y är dock en punktmängd endast om X och Y har samma dimension.

I ZFC kan vi definiera kardinaltalen som de så kallade *aleftalen*. De första är

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots .$$

Det minsta kardinaltalet som är större än dessa skriver vi $\aleph_\omega$. Det är oberoende av ZFC huruvida $|\mathbb{R}| < \aleph_\omega$.

Om vi modifierar definitionerna från Avsnitt 7 något för att ta hänsyn till att unioner av punktmängder inte alltid är en punktmängd, har vi följande resultat.

Sats 31 (Talrikheter på punktmängder).
Relativt ZFC, om $|\mathbb{R}| < \aleph_\omega$ och om det finns ett selektivt ultrafilter så finns det ett storleksmått på punktmängder som begränsat till uppräkneliga punktmängder är euklidiskt.

Bevis. Se Di Nasso och Forti (2010). □

9. Vilket mått är bäst?

Anta positionen att det finns en privilegierad klass oändliga tal att upptäcka och att det finns ett storleksmått som ger oss dessa. Gödel (1947) argumenterar om inte för denna position så i alla fall för att det i så fall är *oundvikligt* att de oändliga talen är Cantors kardinaltal. Gödels argument har kritiserats av Parker (2009) och Mancosu (2009). Det är värt att påpeka att vid tidpunkten (för Gödels argument) var Cantors teori den enda rigorösa matematiska teorin om oändliga tal och oändliga mängders storlek. Existensen av andra icketriviala generaliseringar av ändlig mängdstorlek var ett olöst problem. Robinson hade ännu inte presenterat ickestandardanalys så analys med oändligheter och infinitesimaler saknade fortfarande formell grund.

Mitt bidrag blir att att det finns två konkreta matematiska resultat som talar mot kardinaltal som de oändliga talen och för att de oändliga talen ges av ett euklidiskt mått, nämligen Sats 22 och Sats 24. För vi vill intuitivt att oändlig aritmetik delar så många egenskaper som möjligt med ändlig aritmetik. Sats 22 visar att kardinaltalsaritmetik väsentligen skiljer sig från ändlig aritmetik. Sats 24 visar att endast ett euklidiskt storleksmått kan ge oss oändliga tal som har den intuitivt väsentliga egenskapen att det finns additiva inverser. Om oändliga tal måste ha additiva inverser så måste det rätta storleksmåttet vara ett euklidiskt storleksmått.

Det bör påpekas ett problem för det hitintills enda kända euklidiska storleksmåttet: konstruktionen av talrikhetsmått är känslig för valet av selektivt ultrafilter. Ett selektivt ultrafilter innehåller antingen X eller dess komplement $\mathbb{N} \setminus X$ (men inte båda) för varje mängd X naturliga tal. Benci och Di Nasso (2003) visar följande. Betrakta de jämna respektive de udda talen som märkta mängder genom att ge dem respektive märkfunktion $x \mapsto x$. Konstruera ett talrikhetsmått s från ett selektivt ultrafilter U. Om U innehåller de jämna talen får vi $s(\{\text{jämna tal}\}) = s(\{\text{udda tal}\})$. Om U innehåller de udda talen får vi $s(\{\text{jämna tal}\}) + 1 = s(\{\text{udda tal}\})$. På liknande sätt blir andra mängders talrikheter beroende av vilka mängder som ingår i U. Huruvida vi kan ge en tillräcklig specifikation av ett selektivt ultrafilter för att med ett talrikhetsmått "korrekt" beskriva oändlig storlek är såvitt jag kan se en öppen fråga.

Tillåter vi oss en pragmatisk inställning är det förstås inte särskilt meningsfullt att fråga vilket storleksmått som är bäst. Det finns förstås inget som hindrar olika storleksmått att samexistera. Så länge det finns hopp om tillämpbarhet är ett mått värt att studera. Studier av kardinaltal är ett etablerat forskningsområde vars resultat är kopplade till metamatematiska frågor om oberoende och motsägelsefrihet. Euklidiska storleksmått har funnit tillämpningar i ickestandardanalys (Benci och Di Nasso, 2003) och ickestandardsannolikhet (Benci, Horsten och Wenmackers, 2013; Benci, Bottazzi och Nasso, 2015).

10. Olösta problem

Då euklidiska storleksmått fått bristande uppmärksamhet efter Cantor finns det gott om olösta problem. Litteraturen om talrikheter är en bra startpunkt.

Det intressantaste problemet (åtminstone i mina ögon) torde vara existensen av euklidiska storleksmått. Vi har sett (Avsnitt 8) att de euklidiska storleksmått som hitintills upptäckts kräver mängdteoretiska antaganden utöver ZFC. Det är filosofiskt intressant att fastställa exakt under vilka omständigheter euklidiska storleksmått existerar. För anta att euklidiska storleksmått kräver starka mängdteoretiska antaganden. Å ena sidan skulle den som vill argumentera mot existensen av euklidiska storleksmått då kunna göra det genom att argumentera mot dessa antaganden. Å andra sidan skulle den som accepterar existens av euklidiska storleksmått då ha anledning att anta nya mängdteoretiska axiom.

Ett sätt att försöka närma sig en lösning på detta problem är att konstruera euklidiska storleksmått under svagare antaganden än de som krävs för talrikhetsmått. Kanske kan man åstadkomma detta genom att begränsa klassen bijektioner som tas hänsyn till i

Humes princip, på liknande (men inte nödvändigtvis samma) sätt som jag gjort när jag försökt generalisera Euklides princip.

A. Bevis av Sats 15

En kommutativ ordnad semiring kan inbäddas i någon kommutativ ordnad ring om och endast om

$$x + y = x + y' \implies y = y'.$$

Bevis. Låt S vara en kommutativ ordnad semiring.

(om) Anta

$$x + y = x + y' \implies y = y'.$$

Definiera en struktur $\langle R, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ där R är kvoten av par (x, y) av element $x, y \in S$ under ekvivalensrelationen

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x + y' = x' + y,$$

med addition

$$(x, y) + (x', y') \coloneqq (x + x', y + y')$$

och multiplikation

$$(x, y) \cdot (x', y') \coloneqq (xx' + yy', xy' + yx')$$

och ordning

$$(x, y) \leq (x', y') \iff x + y' \leq y + x'.$$

Med hjälp av hypotes visar man att $\langle R, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ är en kommutativ ordnad ring och att $x \mapsto (x, 0)$ är en inbäddning.

(*endast om*) Anta att φ är en inbäddning och $x + y = x + y'$. Då har vi

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= \varphi(x) + \varphi(y) - \varphi(x) \\
&= \varphi(x + y) - \varphi(x) \\
&= \varphi(x + y') - \varphi(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(x) + \varphi(y') - \varphi(x) \\
&= \varphi(y')
\end{aligned}
$$

så $y = y'$ eftersom φ är injektiv. $\square$

Referenser

Benci, Vieri, Emanuele Bottazzi och Mauro Di Nasso (2015). ”Some applications of numerosities in measure theory”. I: *Rendiconti Lincei: Matematica e applicazioni* 26.1, s. 37–47.

Benci, Vieri och Mauro Di Nasso (2003). ”Numerosities of labelled sets: a new way of counting”. I: *Advances in Mathematics* 173.1, s. 50–67.

Benci, Vieri, Leon Horsten och Sylvia Wenmackers (2013). ”Non-Archimedean probability”. I: *Milan Journal of Mathematics* 81.1, s. 121–151.

Benci, Vieri, Mauro Di Nasso och Marco Forti (2007). ”An Euclidean measure of size for mathematical universes”. I: *Logique et Analyse* 50.197, s. 43–62.

Bolzano, Bernard (1851). *Paradoxien des Unendlichen.* C.H. Reclam. Engelsk översättning: Donald A. Steele (2014). *Paradoxes of the Infinite.* Routledge.

Cantor, Georg (1874). ”Ueber eine eigenschaft des inbegriffs aller reellen algebraischen zahlen.” I: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 77, s. 258–262.

— (1911). *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* Utg. av P.E.B. Jourdain. Open Court Publishing Company.

Di Nasso, Mauro och Marco Forti (2010). ”Numerosities of point sets over the real line”. I: *Transactions of the American Mathematical Society* 362.10, s. 5355–5371.

Dutilh Novaes, Catarina (2014). *M-Phi: Counting Infinities.* URL: `http://m-phi.blogspot.se/2014/03/counting-infinities.html` (hämtad 2015-05-20).

Gödel, Kurt (1947). ”What is Cantor's continuum problem?” I: *The American Mathematical Monthly* 54.9, s. 515–525.

Jech, Thomas (2003). *Set Theory.* 3. utg. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Mancosu, Paolo (2009). ”Measuring the size of infinite collections of natural numbers: was Cantors theory of infinite number inevitable?” I: *The Review of Symbolic Logic* 2.4, s. 612–646.

Parker, Matthew (2009). ”Philosophical method and Galileo's paradox of infinity”. I: *New Perspectives on Mathematical Practices: Essays in Philosophy and History of Mathematics.* Utg. av Bart Van Kerkhove. World Scientific.